Tracé vectoriel de fractales

Matthijs Douze

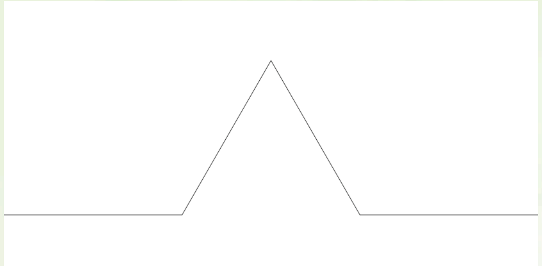
IRIT/ENSEEIHT

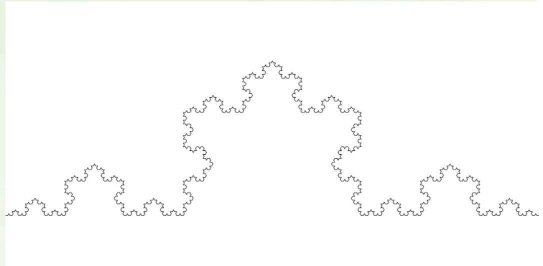
Les fractales

Répétition de formes à des échelles différentes.

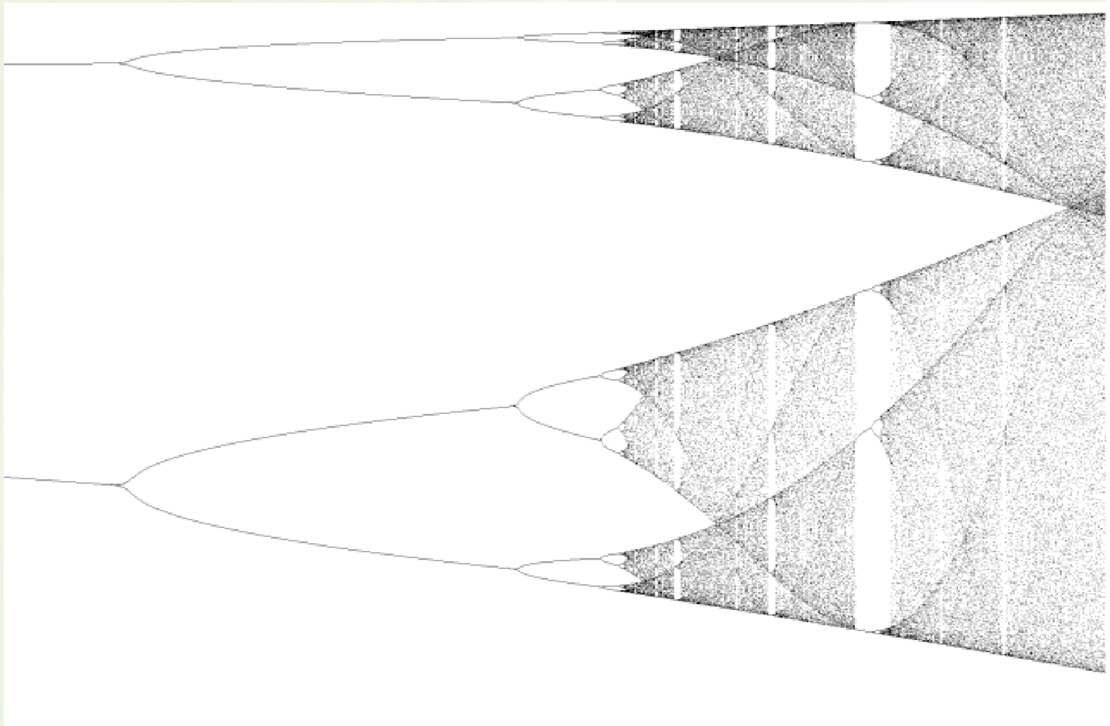
Informatique

explicite





suite



Fractales à « temps d’échappement »

Suite de complexes

$$\begin{cases} u_0(p) = p \\ u_{n+1}(p) = f(u_n, p) \end{cases}$$

$f(z,p)$ **analytique non-linéaire en** z.

p **appartient au fractal si** $(u_n(p))$ ***ne diverge pas.***

Exemples de fonctions

Fonction de Julia (dépend de c)

$$\begin{cases} u_0(p) = p \\ u_{n+1}(p) = u_n^2(p) + c \end{cases}$$

Mandelbrot

$$f(z,p) = z^2 + p$$

Fantaisie

$$f(z,p) = p\sin(z)$$

Images bitmap

Pour tous les p d'un rectangle

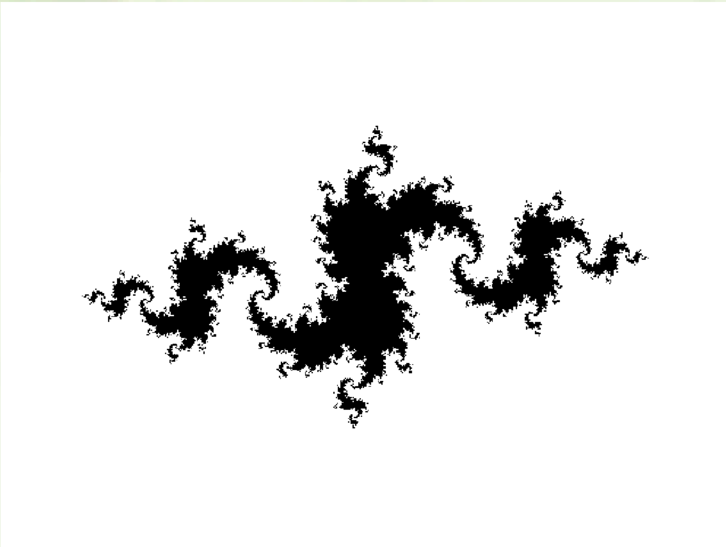
Calculer $n_{\max}$ itérations de $(u_n(p))$

Si une valeur dépasse $d_{\max}$, divergence .. *approximation*

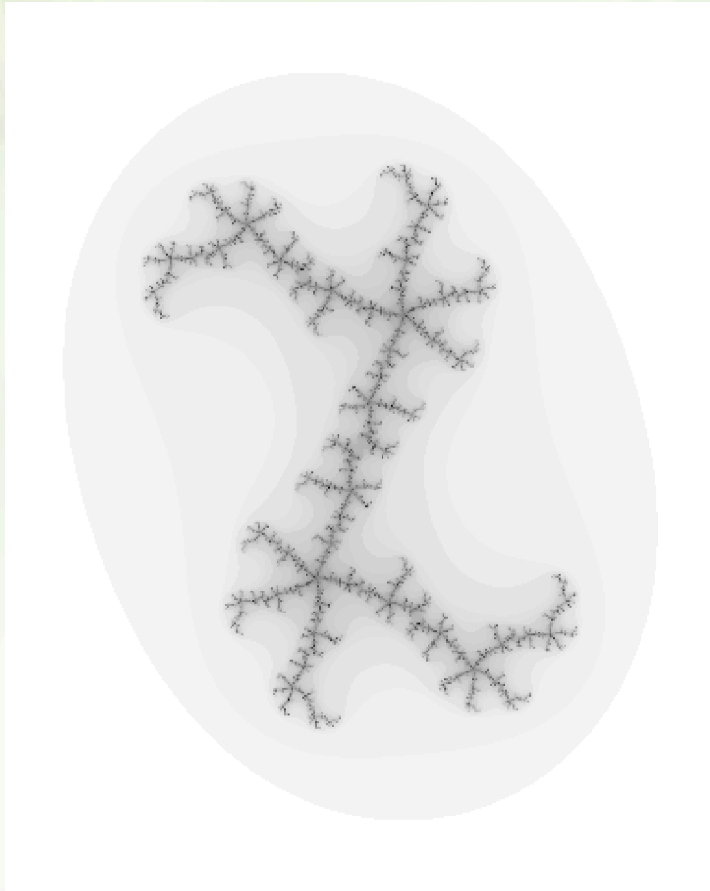
Julia, Mandelbrot : $d_{\max} = 2$

Les fractales de Julia

$c = -0.866 - 0.210i$



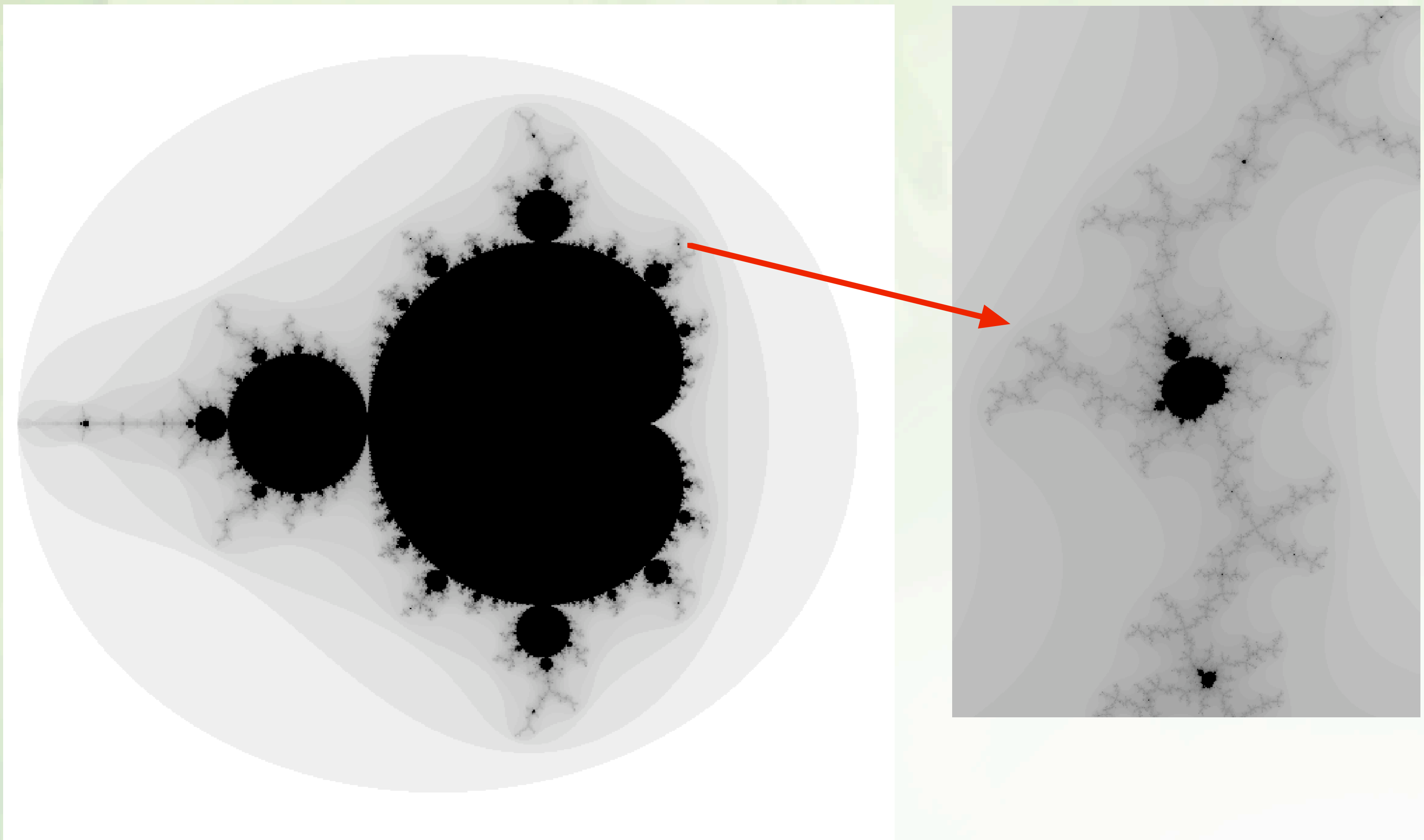
$c = 0.458 + 0.346i$



connexe/surface nulle

Niveaux de gris

La fractale de Mandelbrot



Représentation vectorielle

Ensembles

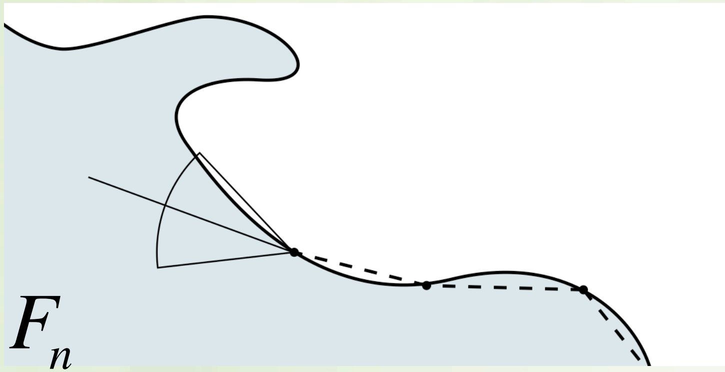
$$F_n = \left\{ p \,/\, \left| u_n(p) \right| < d_{\max} \right\}$$

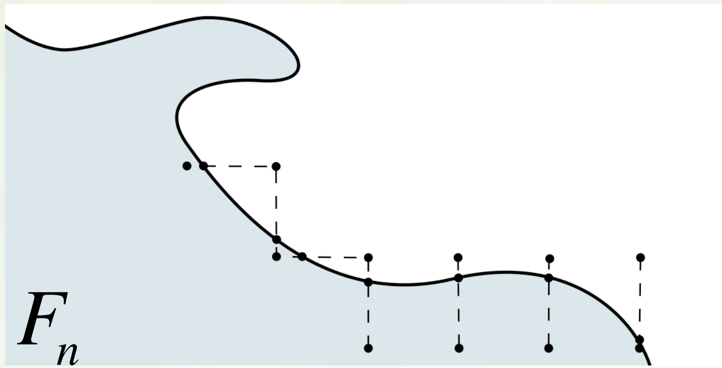
emboîtement

approximation

Première approche : suivi de bords

Deux méthodes





Problèmes...

Calcul explicite

Inverser $u_n(p)$: $F_n = u_n^{-1}(D(0,d_{\max}))$

Polynôme de degré 2^n

2^n racines

parcours de ∂F_n

=

parcours multiple de $C(0,d_{\max})$

Pour la fractale de Julia

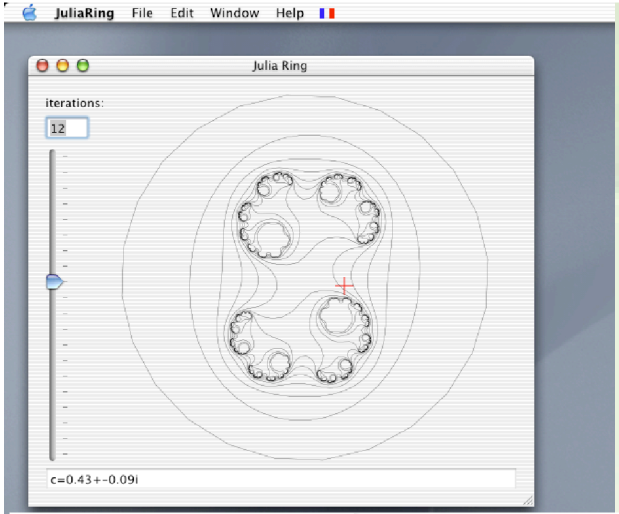
Cas particulier : $f(z,p) = z^2 + c = f(z)$

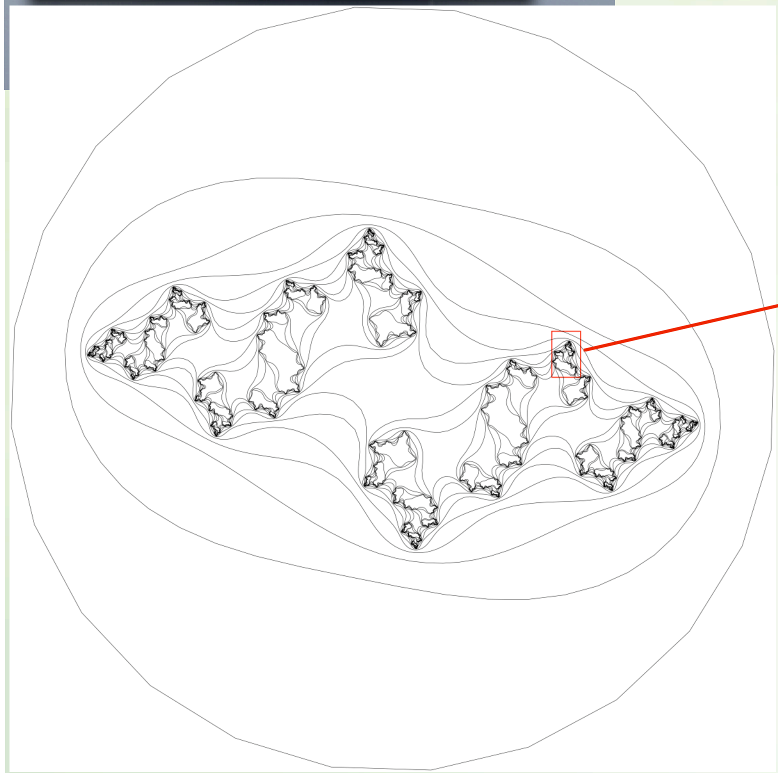
$$u_n^{-1}(p) = (f^{-1})^n(p)$$
$$f^{-1}(z) = \pm\sqrt{z - c}$$

on déduit ∂F_{n+1} **de** ∂F_n

Relier les points

Résultat


JuliaRing File Edit Window Help
Julia Ring
iterations:
12
c=0.43+-0.09i



Mandelbrot

Dérivée au sens complexe

$$u'_{n+1}(p) = 2u'_n(p)u_n(p)$$

Méthode de Newton

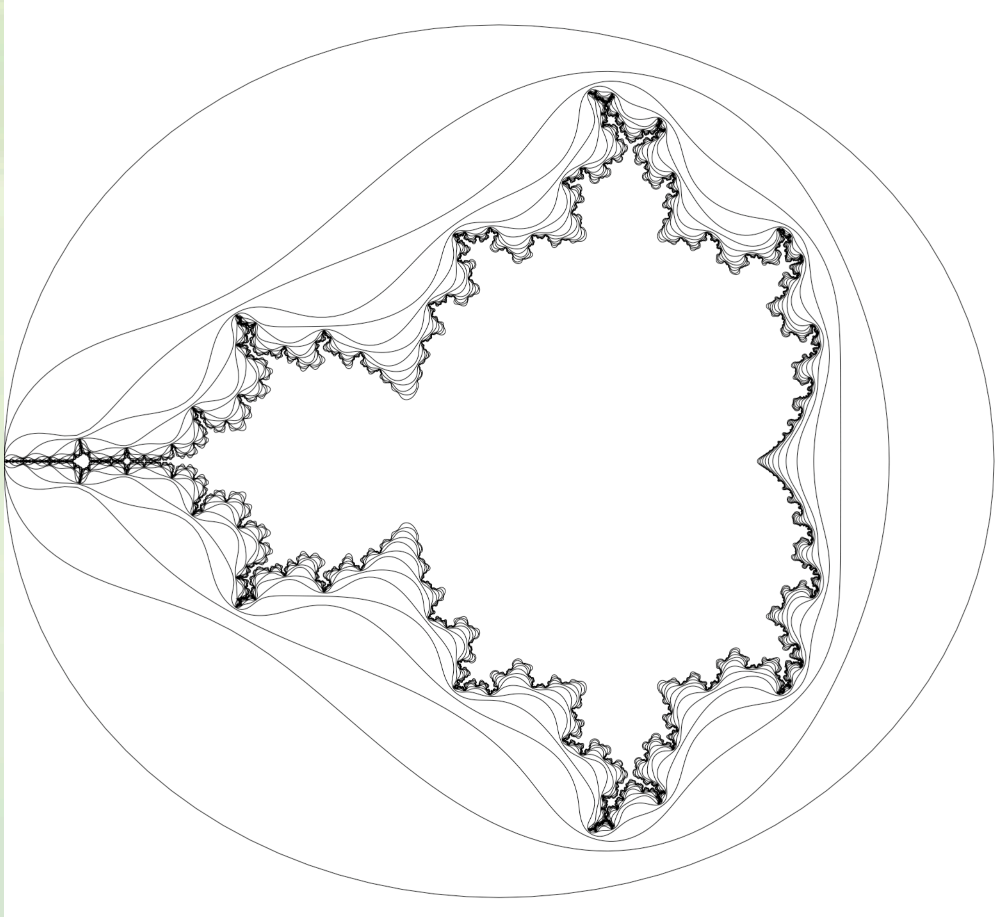
$$v_{k+1} = v_k + \frac{p_{0,i} \square u_n(v_k)}{u'_n(v_k)}$$

Estimation initiale

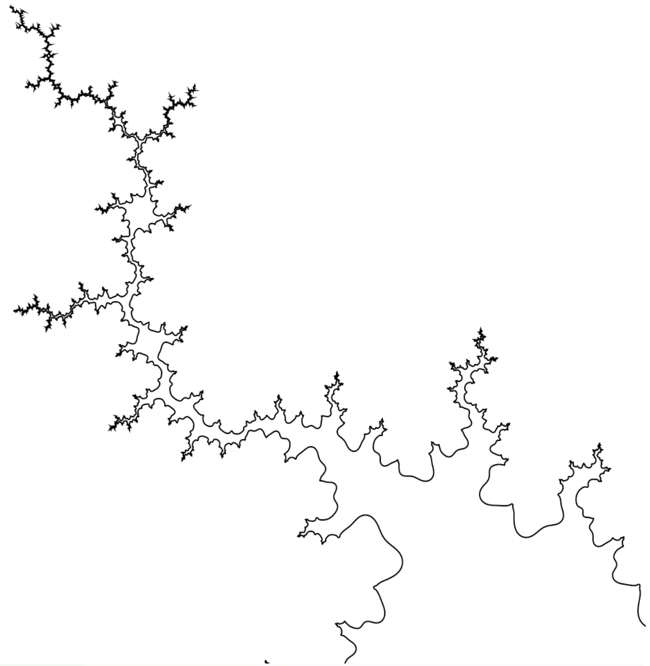
point précédent

Résultat

F_1 **jusqu'à** F_{14}



détail de F_{17}



Fichiers *bigvect*

Problème : la taille de données

  48*2^17 = 6 291 456 points

Format adapté

- points
- polygones
- *boîtes englobantes*

Extraction vers EPS

Conclusion – perspectives

Nouvelles formes à exploiter

En marge de ma thèse

- Problème méthode de Newton
- Extensions…